Total No. of Printed Pages—11

**1 SEM TDC MTH G 1**

**2015**

( November )

MATHEMATICS

( General )

Course : 101

**[ (a) Classical Algebra, (b) Trigonometry, (c) Vector Calculus ]**

*Full Marks* : 80

*Pass Marks* : 32 (Backlog) / 24 (2014 onwards)

*Time* : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

GROUP—A

**( Classical Algebra )**

**1.** (a) বলজেন’-ৱেইছট্ৰাছ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰা। 1

State Bolzano-Weierstrass theorem.

(b) ক’চিৰ অভিসাৰী সম্বন্ধীয় সাধাৰণ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, য’ত

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$ 3

www.prepnext.com

Apply Cauchy's general principle of convergence to show that $\{u_n\}$ is convergent, where

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

(c) প্ৰমাণ কৰা যে এটা অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ দুটা পৃথক সীমা নাথাকে। 2

Prove that a convergent sequence cannot tend to two distinct limits.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ। ইয়াৰ সীমা নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$u_n = \frac{3n+1}{n+2}$$ 4

Prove that the sequence $\{u_n\}$, where $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ is monotonic increasing and bounded above. Find its limit.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, য'ত $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ আৰু $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ৰ সীমা 2 আৰু 3 ৰ মাজত আছে।

www.prepnext.com

Show that the sequence $\{u_n\}$, where $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ is convergent and that limit of $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lies between 2 and 3.

2. (a) অসীম শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define infinite series.

(b) এটা অসীম শ্ৰেণী অভিসাৰী হোৱা লিবনিটজ পৰীক্ষাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা। 1

State the condition of Leibnitz's test for convergence of an infinite series.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক অসীম শ্ৰেণী

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \text{ to } \infty$$

অভিসাৰী, যদি $p>1$. 3

Prove that a positive term infinite series

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \text{ to } \infty$$

is convergent if $p>1$.

www.prepnext.com

(d) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 5×2=10

Test for convergence of any *two* of the following :

(i) $1+\frac{3}{7}x+\frac{3\cdot 6}{7\cdot 10}x^2+\frac{3\cdot 6\cdot 9}{7\cdot 10\cdot 13}x^3+\cdots$ to $\infty$

(ii) The $n$th term of the series is

$$\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$$

(iii) $\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 4^2}+\frac{3\cdot 4}{5^2\cdot 6^2}+\frac{5\cdot 6}{7^2\cdot 8^2}+\cdots$ to $\infty$

3. (a) তলৰ সমীকৰণটোৰ মূলবোৰৰ মাজৰ সম্বন্ধবোৰ লিখা : 1

Write down the relations among the roots of the following equation :

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

(b) যদি এটা বহুপদ $f(x)$ ক $x-h$ ৰে হৰণ কৰা হয় ($h$ যি কোনো এটা ধ্রুৱক), তেন্তে প্রমাণ কৰা যে ভাগশেষ $f(h)$ হ'ব। 2

If a polynomial $f(x)$ is divided by $x-h$, ($h$ is any constant), then prove that the remainder is $f(h)$.

www.prepnext.com

(c) যদি $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$ সমীকৰণৰ এটা মূল অন্য দুটা মূলৰ এটাৰ দুগুণ হয়, সমীকৰণটো সমাধান কৰা। 3

Solve the equation, $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$ if one root is double of one of the other two roots.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে $x^{10} - 4x^6 + x^4 - 2x - 3 = 0$ সমীকৰণৰ অতিকমেও চাৰিটা কাল্পনিক মূল আছে।

Prove that the equation

$$x^{10} - 4x^6 + x^4 - 2x - 3 = 0$$

has at least four imaginary roots.

(d) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ যদি $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ মূল হয়, তেন্তে $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$ ৰ মান উলিওৱা। 4

If $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ be the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find the value of $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

(e) সাধাৰণ ত্ৰিঘাত সমীকৰণৰ সমাধান কৰাৰ বাবে কাৰ্ডানৰ প্ৰণালীটো আলোচনা কৰা। 5

Discuss Cardan's method for solving a general cubic equation.

www.prepnext.com

অথবা / Or

$x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ যদি $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ মূল হয়; তেন্তে $\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

If $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ be the roots of $x^3 + qx + r = 0$, then find the equation whose roots are

$$\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta},\quad \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma},\quad \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$$

## GROUP—B

## ( Trigonometry )

**4.** *(a)* $\tan x$ ৰ বিস্তৃতিত শুদ্ধ উত্তৰটো লিখা। 1

Choose the correct expansion of $\tan x$.

*(i)* $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

*(ii)* $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

*(iii)* $x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots$

www.prepnext.com

(b) $\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\sin\theta + i\cos\theta}\right)^5$ ক $x + iy$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰা। 2

Express $\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\sin\theta + i\cos\theta}\right)^5$ in the form $x + iy$.

(c) ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু যি কোনো অখণ্ড সংখ্যা $n$ ৰ বাবে ইয়াক প্ৰমাণ কৰা। 5

State De Moivre's theorem and prove it when $n$ is any integer.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\frac{\sin^3\theta}{3!} = \frac{\theta^3}{3!} - (1+3^2)\frac{\theta^5}{5!} + (1+3^2+3^4)\frac{\theta^7}{7!}$$

5. (a) মান লিখা : 1

Write down the value of

$$e^{2n\pi i},\ n \in z$$

(b) যদি (If)

$$i^{i^{i\cdots \text{ad inf}}} = A + iB$$

প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\tan\frac{\pi A}{2} = \frac{B}{A}$$

আৰু (and)

$$A^2 + B^2 = e^{-\pi B}$$ 2+2

www.prepnext.com

6. যদি (If) $x < \sqrt{2} - 1$, প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right)$$
$$= \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5 - \cdots$$ 4

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{\tan^{-1} y}{y} + \frac{\tan^{-1} z}{z}$$
$$= 3\left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \cdots\right)$$

য'ত $x$, $y$, $z$ এককৰ তিনিটা ঘনমূল।

where $x$, $y$, $z$ are three cube roots of unity.

7. *(a)* প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ 1

*(b)* $\sinh(x + iy)$ ৰ বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশ পৃথক কৰা। 2

Separate into real and imaginary parts of $\sinh(x + iy)$.

www.prepext.com

(c) cosine শ্ৰেণীৰ $n$ কোণৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা, যেতিয়া কোণবোৰ সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকে। 5

Find the sum of the cosines of a series of $n$ angles, when angles are in arithmetical progression.

অথবা / *Or*

শ্ৰেণীটোৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা (Find the sum of the series)

$$\cos\theta \cos\theta + \cos^2\theta \cos 2\theta + \cos^3\theta \cos 3\theta + \cdots \text{ to } \infty$$

## GROUP—C

## ( Vector Calculus )

**8.** (a) সদিশ বিন্দু ফলনৰ দিক অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define directional derivative of vector point function.

(b) সঁচা নে মিছা লিখা : 1

State True or False :

এটা সদিশ ৰাশিৰ বিন্দু ফলনৰ divergence এটা সদিশ ৰাশি।

Divergence of a vector point function is a vector quantity.

www.prepnext.com

(c) যদি (If) $\vec{A} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ আৰু (and) $\vec{B} = (2t-3)\hat{i} + (\hat{j} - t\hat{k})$, তেন্তে (then find) $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ নিৰ্ণয় কৰা। 2

(d) দেখুওৱা যে (Show that)

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$$

য'ত (where)

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ 3

(e) তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা : 4×2=8

Answer any *two* of the following :

(i) মান নিৰ্ণয় কৰা (Evaluate) :

$$\nabla \log r,\ r = |\vec{r}|,\ \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

(ii) প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

www.prepnext.com

(iii) যদি (If) $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$, প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that) $\vec{w} = \frac{1}{2} \text{curl}\, \vec{v}$, য'ত (where) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু (and) $\vec{w} = w_1\hat{i} + w_2\hat{j} + w_3\hat{k}$. $\vec{w}$ এটা ধ্ৰুৱক সদিশ ($\vec{w}$ is a constant vector).

★★★

www.prepnext.com