Total No. of Printed Pages—7

1 SEM TDC MTH G 1

2 0 1 4

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 101

[(a) Classical Algebra, (b) Trigonometry, (c) Vector Calculus]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32 (Backlog) / 24 (2014–15 Session)

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

GROUP—A

(Classical Algebra)

1. (a) $\langle S_n \rangle = \{1+(-1)^n\},\ n \in \mathbb{N}$ অনুক্ৰমৰ পৰিসৰ লিখা। 1

Write the range set of the sequence $\langle S_n \rangle = \{1+(-1)^n\},\ n \in \mathbb{N}$.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে সকলো অভিসাৰী অনুক্ৰম সীমাবদ্ধ। 4

Prove that every convergent sequence is bounded.

(c) ক'চিৰ অভিসাৰী সম্বন্ধীয় সাধাৰণ সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 1+4=5

State and prove Cauchy's general principle of convergence.

অথবা / Or

একদিষ্ট অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, য'ত $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. 5

Define monotonic sequence. Prove that $\{u_n\}$ is convergent, where $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. *(a)* অভিসাৰিতা পৰীক্ষাৰ বাবে ক'চিৰ মূল পৰীক্ষাটো উল্লেখ কৰা। 1

State the Cauchy's root test for convergence.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে এটা অসীম শ্ৰেণী Σu_n অভিসাৰী হ'বলৈ হ'লে $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\, u_n = 0$ চৰ্তটো আৱশ্যকীয়। 3

Prove that a necessary condition for an infinite series Σu_n to be convergent is that $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\, u_n = 0$.

(c) অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 3×2=6

Test for convergence :

(i) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

(ii) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 7} + \dots$

(d) তলৰ অভিসাৰিতা বা অপসাৰিতা ব্যাখ্যা কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Discuss the convergency or divergency of the following (any *one*) :

(i) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\dots$

(ii) $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\dots$

3. (a) বীজগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটো লিখা। 1

Write the fundamental theorem of algebra.

(b) দেখুওৱা যে $x^9-x^5+x^4-x^2+1=0$ ৰ অতি কমেও দুটা কাল্পনিক মূল আছে। 2

Show that $x^9-x^5+x^4-x^2+1=0$ has at least two imaginary roots.

(c) $2x^3+3x^2-32x-48=0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা, য'ত দুটা মূলৰ সমষ্টি শূন্য। 3

Solve the equation

$$2x^3+3x^2-32x-48=0$$

where the sum of two roots is zero.

(d) কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধান কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Solve by Cardan's method (any *one*) :

(i) $x^3 - 9x + 28 = 0$

(ii) $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$

(e) যদি $(x-a)^2$, $x^3 + 3px + q = 0$ৰ এটা উৎপাদক হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $q^2 + 4p^3 = 0$. 4

If $(x-a)^2$ is a factor of $x^3 + 3px + q = 0$, then show that $q^2 + 4p^3 = 0$.

GROUP—B

(Trigonometry)

4. (a) $-i$ক ডি মইভাৰৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰা। 1

Express $-i$ in De Moivre's form.

(b) $(-1)^{\frac{1}{3}}$ৰ মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the values of $(-1)^{\frac{1}{3}}$.

(c) n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$ 5

If n is a positive integer, prove that

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$$

অথবা / Or

যদি $(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots = \cos\frac{n\pi}{4}$$

If $(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$, then prove that

$$a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots = \cos\frac{n\pi}{4}$$

5. π^iৰ বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশ পৃথক কৰা। 5

Separate into real and imaginary parts of π^i.

অথবা / Or

যদি $\sin(A+iB) = x+iy$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

If $\sin(A+iB) = x+iy$, then prove that

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

6. প্ৰমাণ কৰা যে 4

Prove that

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right) - \dots$$

7. (a) শ্ৰেণীটোৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা : 3

Find the sum of the series :

$$\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta \sin 3\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta \sin 4\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin 4\theta \sin 5\theta} + \dots$$

(b) শ্ৰেণীৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Find the sum of the series (any *one*) :

(i) $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha + \dots$

(ii) $\sinh\theta + \sinh 2\theta + \sinh 3\theta + \dots$

GROUP—C

(Vector Calculus)

8. (a) স্পেচ্ বক্ৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define space curve.

(b) এটা কণাই $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$ বক্ৰৰে গতি কৰে, য'ত t হ'ল সময়। $t = 3$ ত কণাটোৰ বেগ আৰু ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 2

A particle moves along a curve $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$, where t is time. Find the velocity and acceleration at $t = 3$.

(c) যদি $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z + 2$ হয়, তেন্তে f পৃষ্ঠৰ $(1, -1, -2)$ বিন্দুত একক লম্ব ভেক্টৰটো নিৰ্ণয় কৰা। 3

If $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z + 2$, then find the unit normal vector to the surface of f at $(1, -1, -2)$.

(d) যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(\operatorname{div} \vec{r}) = 3$. 2

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then prove that $(\operatorname{div} \vec{r}) = 3$.

(e) তলৰ যি কোনো এটা প্ৰমাণ কৰা : 4

Prove any *one* of the following :

(i) $\nabla^2 r^n = n(n+1) r^{n-2}$

(ii) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

(f) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\operatorname{div}(\phi \vec{A}) = (\operatorname{grad} \phi) \cdot \vec{A} + \phi(\operatorname{div} \vec{A})$$ 3

★★★