Total No. of Printed Pages—8

1 SEM TDC MTH G 1

2013

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 101

[(a) Classical Algebra, (b) Trigonometry, (c) Vector Calculus]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

GROUP—A

(Classical Algebra)

1. তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ কৰা : 1×3=3

Answer the following questions :

(a) বাস্তৱ অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Define real sequence.

(b) অসীম গুণোত্তৰ শ্ৰেণী

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$ ৰ

অভিসাৰিতাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা।

State the condition for convergence of infinite geometric series

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

www.prepnext.com

(c) যদি বহুপদ ৰাশি $p(x)$ ক $x-\alpha$ ৰে হৰণ কৰা হয় (α যি কোনো এটা ধ্ৰুৱক), তেন্তে ভাগশেষ উল্লেখ কৰা।

If a polynomial $p(x)$ is divided by $x-\alpha$, where α is a constant, then state the remainder.

2. তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ কৰা : 2×5=10

Answer the following questions :

(a) প্ৰমাণ কৰা যে এটা অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ দুটা পৃথক সীমা নাথাকে।

Prove that a convergent sequence cannot tend to two distinct limits.

(b) এটা অসীম শ্ৰেণী অভিসাৰি হোৱা ডি-এলেমবাৰ্টৰ অনুপাত পৰীক্ষাৰ চৰ্তকেইটা উল্লেখ কৰা।

State the conditions of d'Alembert's ratio test for convergence of a series.

(c) অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

Test for convergence of the series :

$$\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}+\cdots$$

(d) যদি $1, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ সমীকৰণ $x^n-1=0$ ৰ nটা মূল, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\cdots(1-x_{n-1})=n$$

If $1, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ are the roots of the equation $x^n-1=0$, then show that

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\cdots(1-x_{n-1})=n$$

www.prepnext.com

(e) দেখুওৱা যে $x^4 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$ ৰ এটা মূল -3 আৰু -2 ৰ মাজত আছে।

Show that the equation $x^4 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$ has a root between -3 and -2.

3. (a) দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অভিসাৰি, যদি

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$ 3

Show that the sequence $\{u_n\}$ is convergent, if

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

(b) ক'চিৰ অভিসাৰি সম্বন্ধীয় সাধাৰণ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি, দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰি নহয়। য'ত

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$ 4

Use general principle of Cauchy's criterion to show that $\{u_n\}$ is not convergent, where

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

4. তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 5×2=10

Test the convergence of any *two* of the following :

(i) $\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^4}{7} + \cdots, x > 0$

(ii) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{4^3} + \cdots$

www.prepnext.com

(iii) $1+\frac{2^p}{\lfloor 2}+\frac{3^p}{\lfloor 3}+\frac{4^p}{\lfloor 4}+\cdots$ to ∞, $\forall\ p\in R$

5. (a) যদি $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণৰ মূল তিনিটা α, β, γ হয়; তেন্তে

$$\alpha-\frac{1}{\beta\gamma},\ \beta-\frac{1}{\gamma\alpha},\ \gamma-\frac{1}{\alpha\beta}$$

মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা। 5

If α, β, γ be the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, form the equation whose roots are $\alpha-\frac{1}{\beta\gamma},\ \beta-\frac{1}{\gamma\alpha},\ \gamma-\frac{1}{\alpha\beta}$.

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা যে n-তম ঘাতৰ বীজগণিতীয় সমীকৰণ এটাৰ কেৱল nটা বাস্তৱ অথবা কাল্পনিক মূল থাকে।

Prove that every algebraic equation of degree n has exactly n real or imaginary roots.

(b) কাৰ্ডন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি, $x^3-6x-9=0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা। 5

Solve the equation $x^3-6x-9=0$ using Cardan's method.

GROUP—B

(Trigonometry)

6. (a) $\sin\alpha$ ক α ৰ ঘাতত বিস্তৃত কৰোতে দ্বিতীয় পদটো কিমান? 1

What is the 2nd term in the expansion of $\sin\alpha$ in terms of α?

www.prepnext.com

(b) গ্রেগ'ৰিৰ শ্ৰেণীটো উল্লেখ কৰা। 1

State Gregory's series.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\left(\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$ 2

7. ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু যি কোনো অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰা। 5

State De Moivre's theorem and prove it when n is any integer.

অথবা / Or

যদি $x=\cos\theta+i\sin\theta$ আৰু $1+\sqrt{1-a^2}=na$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$1+a\cos\theta=\frac{a}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right)$$

If $x=\cos\theta+i\sin\theta$ and $1+\sqrt{1-a^2}=na$, prove that

$$1+a\cos\theta=\frac{a}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right)$$

8. (a) Log {log $(\cos\theta+i\sin\theta)$} ক $A+iB$ ত প্ৰকাশ কৰা। 2

Express Log {log $(\cos\theta+i\sin\theta)$} in the form $A+iB$.

www.prepnext.com

(b) প্ৰমাণ কৰা যে / Prove that

$$\tan\left\{i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right\}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

য'ত a আৰু b দুটা বাস্তৱ ৰাশি। 3

where a and b are two real quantities.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে / Prove that

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{7^5}\right)-\cdots$$ 3

অথবা / Or

যদি $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\log\sec\theta=\frac{1}{2}\tan^2\theta-\frac{1}{4}\tan^4\theta+\frac{1}{6}\tan^6\theta-\cdots$$

If $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, prove that

$$\log\sec\theta=\frac{1}{2}\tan^2\theta-\frac{1}{4}\tan^4\theta+\frac{1}{6}\tan^6\theta-\cdots$$

9. (a) যদি $\cos^{-1}(u+iv)=\alpha+i\beta$, প্ৰমাণ কৰা যে $x^2-(1+u^2+v^2)x+u^2=0$ সমীকৰণৰ মূল দুটা $\cos^2\alpha$ আৰু $\cosh^2\beta$. 3

If $\cos^{-1}(u+iv)=\alpha+i\beta$, prove that $\cos^2\alpha$ and $\cosh^2\beta$ are the roots of the equation

$$x^2-(1+u^2+v^2)x+u^2=0$$

www.prepnext.com

(b) যোগফল নিৰ্ণয় কৰা : 5

Find the sum :

$$\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta - \cdots \text{ to } \infty, \ -\pi < \theta < \pi$$

অথবা / *Or*

Sine শ্ৰেণীৰ *n* কোণৰ যোগফল নিৰ্ণয় কৰা, যেতিয়া কোণবোৰ সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকে।

Find the sum of the sines of a series of *n* angles which are in arithmetical progression.

GROUP—C

(Vector Calculus)

10. (a) তলত দিয়া ৰাশিটো শুদ্ধকৈ লিখা :

Write the following expression correctly :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$ 1

(b) ভেক্টৰ অৱকল অপাৰেটৰ ∇ ৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Give the definition of vector differential operator ∇.

(c) যদি $r = |\vec{r}|$, য'ত $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$ 2

If $r = |\vec{r}|$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, prove that

$$\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$

www.prepnext.com

11. $f(x, y, z)$ ফলনৰ (x, y, z) বিন্দুত দিশাংকীত অৱকলতা বুলিলে কি বুজা? অক্ষৰ দিশত ইয়াৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। 3

What do you mean by directional derivative of $f(x, y, z)$ at the point (x, y, z)? Find its values in the direction of coordinate axes.

অথবা / *Or*

$\phi = x^3 + y^3 + z^3$ ফলনটোৰ $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰৰ দিশত $(1, -1, 2)$ বিন্দুত দিশাংকীত অৱকলতা নিৰ্ণয় কৰা।

Find the directional derivative of $\phi = x^3 + y^3 + z^3$ at the point $(1, -1, 2)$ in the direction of the vector $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

12. তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা : $4 \times 2 = 8$

Answer any *two* of the following :

(a) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\text{curl}\,(\phi\vec{A}) = (\text{grad}\,\phi) \times \vec{A} + \phi\,(\text{curl}\,\vec{A})$$

(b) যদি $\vec{f} = x^2 z\hat{i} - 2y^3 z^2 \hat{j} + xy^2 z\hat{k}$ ৰ $(1, -1, 1)$ বিন্দুত $\nabla \cdot \vec{f}$ আৰু $\nabla \times \vec{f}$ নিৰ্ণয় কৰা।

If $\vec{f} = x^2 z\hat{i} - 2y^3 z^2 \hat{j} + xy^2 z\hat{k}$, determine $\nabla \cdot \vec{f}$ and $\nabla \times \vec{f}$ at $(1, -1, 1)$.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

★ ★ ★

www.prepnext.com